

初めて学ぶ材料力学

名古屋工業大学 前川 覚

URL: http://researcher.nitech.ac.jp/html/100000255_ja.html

Email: maegawa.satoru@nitech.ac.jp

目次

第1章 はじめに

- 1.1. 材料力学とは
- 1.2. 材料力学を学ぶ意義
- 1.3. 材料力学を学ぶための道しるべ

第2章 応力とひずみ

- 2.1. 力とモーメントのつり合い
- 2.2. 外力と内力
- 2.3. 応力とひずみ
- 2.4. 応力とひずみの関係
- 2.5. 許容応力と安全率
- 2.6. まとめ

第3章 単純な問題

- 3.1. 単純な応力が働く場合
- 3.2. 棒の引張と圧縮
- 3.3. 棒やはりの曲げ
- 3.4. 棒のねじり
- 3.5. まとめ

導入編

「なぜ材料力学は必要か？」

ここでは材料力学の立ち位置から機械設計における材料力学の意義についてを詳しく説明します

基礎編

材料力学を学ぶ上で絶対に必要な基礎知識を説明します

基礎編

単純な形状における応力や変形量の計算方法を学びながら材料力学の基礎について説明します

目次

第4章 複雑な問題

- 4.1. 組み合わせ応力が働く場合
- 4.2. モールの応力円
- 4.3. 主応力とミーゼス応力
- 4.4. 材料破壊の法則
- 4.5. まとめ

第5章 材料強度

- 5.1. 材料損傷
- 5.2. 静的破壊
- 5.3. 疲労破壊
- 5.4. 座屈
- 5.5. 許容応力と安全率
- 5.6. まとめ

第6章 まとめ

- 6.1. 材料力学とCAE
- 6.2. より専門的な内容の理解のために

応用編

組み合わせ応力問題は初学者が
まずきやすい問題です
ここを突破できれば材料力学の理
解がぐっと深まります

応用編

材料力学の最終地点です
機械設計に対する知識が格段に
向上するはずです！

本講義のまとめと

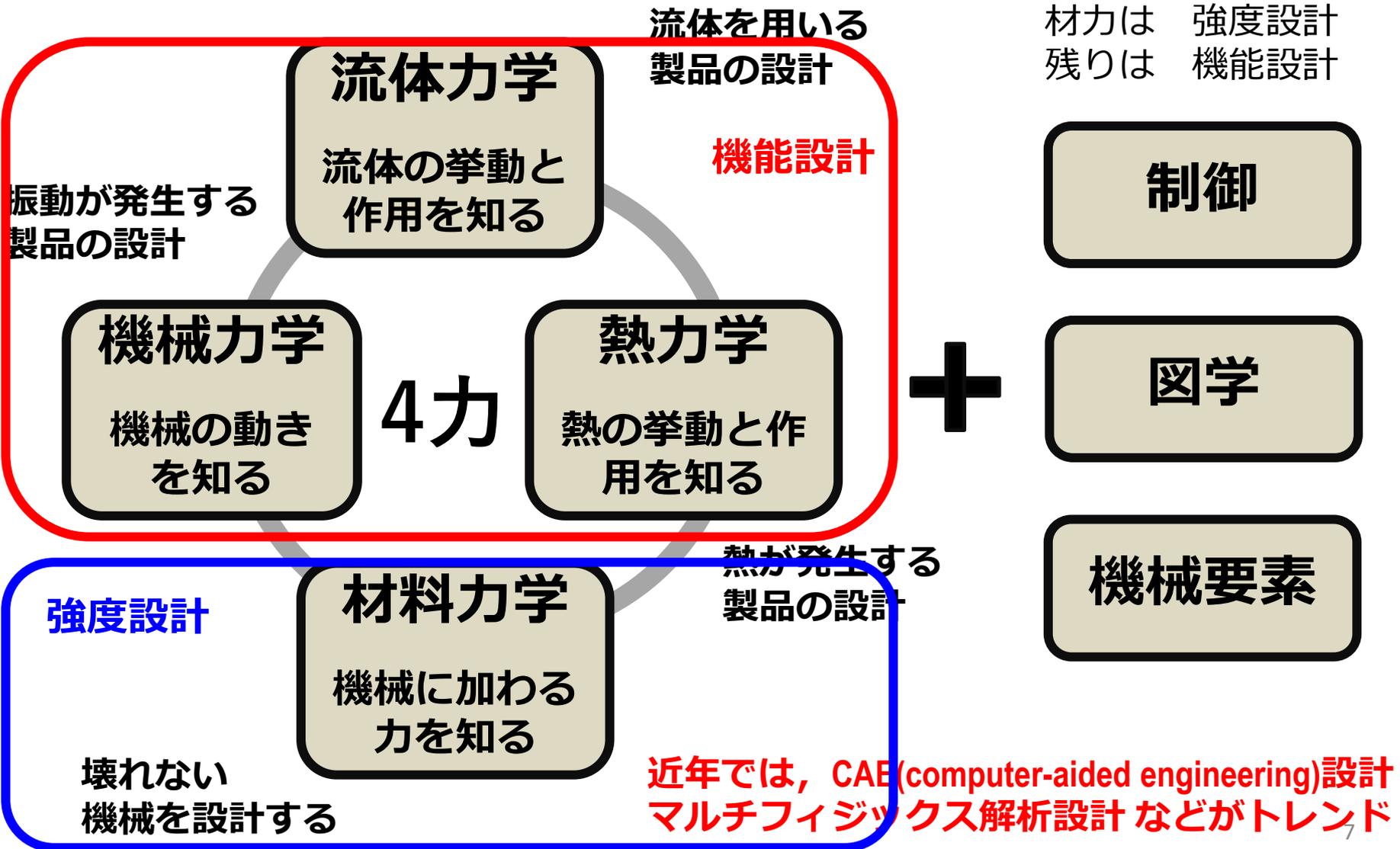
より専門的な内容のための橋渡し
を説明します

第1章 はじめに

- 1.1. 材料力学とは
- 1.2. 材料力学を学ぶ意義
- 1.3. 材料力学を学ぶための道しるべ

1.1. 材料力学とは

機械設計に必要な知識



1.1. 材料力学とは

材料力学（ざいりょうりきがく、英語: strength of materials、mechanics of materials）は、**応用力学**の一分野で、機械や構造物、固体材料に**負荷**が加わったときの**変形**、そして**破壊の原理**を研究する**学問**である。

広義と狭義 [編集]

「材料力学」は、必要な環境下での材料の変形・破損・破壊特性を知るための学問である。実際の機械や構造物にどのような荷重が負荷し、それにより部材にどのような**応力**や**変形**が生じるかを調査・解析し、理論と実験の両面から**性能評価**を取り扱うものである^[1]。

2章 3章 基礎編

狭義の材料力学は、弾性力学に立脚した固体の弾性解析のうち、棒や軸などの一次元の構造や一次元の部材を組み合わせた単純な構造物の強度設計ならびに剛性設計を行うための基礎的な学問分野を指す。棒の引っ張りと圧縮、軸のねじり、はり(梁)の曲げとたわみ、柱の座屈といった一次元構造物の比較的単純な変形を想定し、荷重やモーメントなどの外力が負荷する場合の構造物の変形を取り扱う^{[2][3][4][5]}。大学の講義としての材料力学は、概して狭義の定義に従う場合が多い。**土木工学**・**建築学**における**構造力学**の内容も、この狭義の材料力学の内容に近い。構造力学と狭義の材料力学との違いは、材料力学では主に一つの構成部材を対象として変形や応力を解析することが多いのに対し、構造力学では複数の連結された部材からなる構造物の変形や応力を主な評価対象とする点である。このため、材料力学は構造力学の基礎の一つといえる。

4章 5章 応用編

は、二次元・三次元の固体構造物の変形を扱う弾性力学・固体力学や、切欠きやき裂の健全性を評価する**材料強度学**・**破壊力学**、材料の非線形・非弾性変形を扱う**弾塑性力学**・**粘弾性力学**まで含んだ広い領域を指す。近年では固体力学における構造解析にはもっぱら**有限要素法**が用いられるので、**有限要素法**や**境界要素法**などの数値解析を含む学問領域も広義の材料力学に含まれると言える。さらには**ひずみゲージ**や**デジタル画像相関法**等を用いた**ひずみ測定理論**、**超音波**や**X線**を用いた**材料・構造の非破壊検査技術**、**光弾性法**や**赤外線**を用いた**応力の可視化技術**等も広義の意味で材料力学の範疇に含まれる。

さらに専門的な範囲

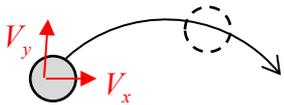
1.1. 材料力学とは

CAE解析に必要な知識

本講義の内容

	高校 質点の力学	大学1年 質点の力学	大学2年 材料力学(基礎)	大学3年 材料力学(応用)	大学院 材料力学(専門) 連続体力学 非線形連続体力学
質量	○	○	○	○	○
形状	△	△	△ 単純形状	△ 単純形状	○ 任意形状
変形	×	×	△ 単純変形	△ 単純変形	○ 弾塑性変形
数学技法	スカラー 微積分	ベクトル 微積分	スカラー 微分方程式	ベクトル テンソル 微分方程式	ベクトル テンソル 微分方程式 線形代数学

質点の力学



運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

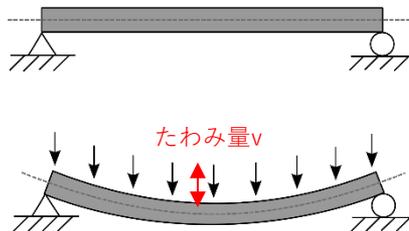
$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

変位の時間変化

$$x = V_x t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_y t$$

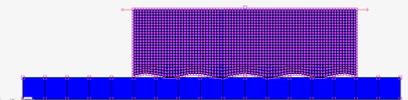
材料力学



たわみ方程式

非線形連続体力学

FEM解析



$$0 = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F}_v$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{ad} + \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{el}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{el} = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{inel}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{inel} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_{ext} + \boldsymbol{\epsilon}_{th} + \boldsymbol{\epsilon}_{hs} + \boldsymbol{\epsilon}_{pl} + \boldsymbol{\epsilon}_{cr} + \boldsymbol{\epsilon}_{vp}$$

$$\mathbf{S}_{ad} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_{ext} + \mathbf{S}_q$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}]$$

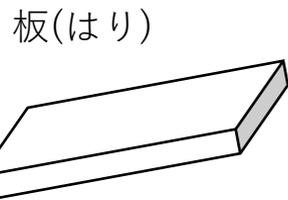
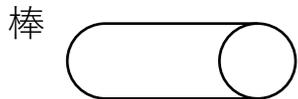
$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(E, \nu)$$

1.1. 材料力学とは

単純な形状に荷重が加わった時に生じる変形を理論によって予測する学問

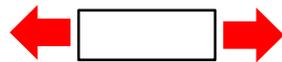
どの程度の力が加わると材料が破損するかを理論によって予測する学問

単純な形状とは

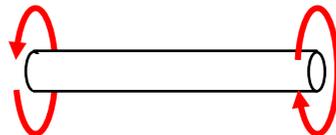


荷重とは

引張荷重

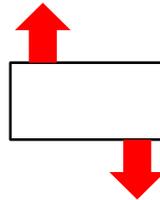


圧縮荷重

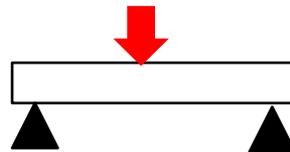


ねじり荷重

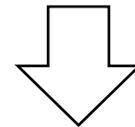
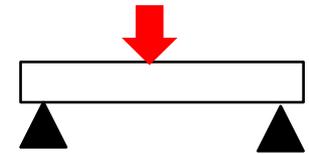
せん断荷重



曲げ荷重



破損とは



1.3. 材料力学を学ぶための道しるべ

全体像が見えた後に学習するのが効率がよい

各単元が有機的に繋がっている
>>> 全体像を理解するためには必読
>>> 理解するのに時間がかかる

専門書

『材料力学』
『連続体力学』など

各単元間で齟齬が生じないように
より精緻な記述が要求される。
その結果、難解になりがち。

本講義の立ち位置

全体像を説明
するのが目的

参考書

『よくわかる・・・』
『絵でわかる・・・』など

演習書

『演習 材料力学』
『実践 材料力学』など

説明がトピック形式（離散的）

>>> 導入としては良いが全体像が見えにくい

暗記物になりがちで知識の習得には不向き
ただし、数学的知識は不要で導入には良い

各単元の間を独習する

>>> 全体像を自分で理解できる

>>> 独学で頑張らないといけない

理解の習得には最も効果的であるが
修了までに時間を要する

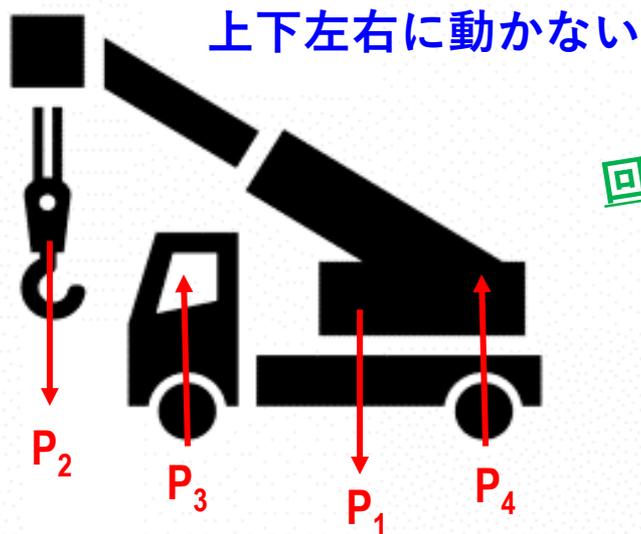
第2章 応力とひずみ

- 2.1. 力とモーメントのつり合い
- 2.2. 外力と内力
- 2.3. 応力とひずみ
- 2.4. 応力とひずみの関係
- 2.5. 許容応力と安全率
- 2.6. まとめ

2.1. 力とモーメントのつり合い

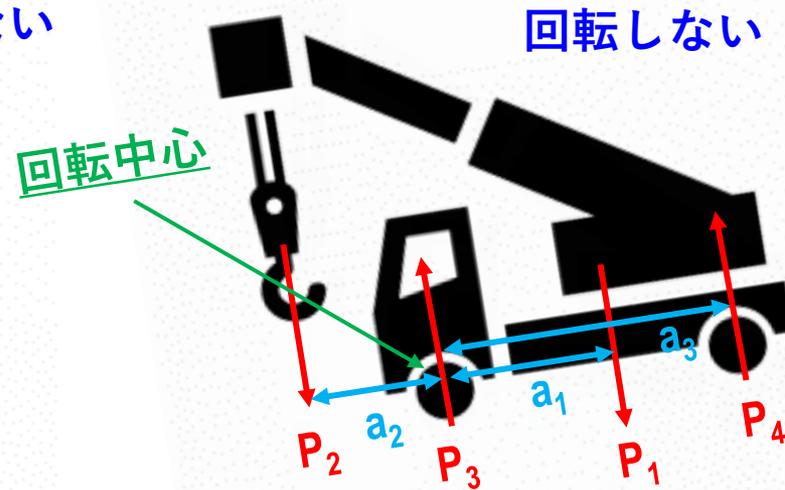
- ・ 力とモーメントは釣り合っている >>> 物体は動かない
- ・ 物体は静止している >>> 力とモーメントは釣り合っている

力のつり合い



$$\sum_i P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$$

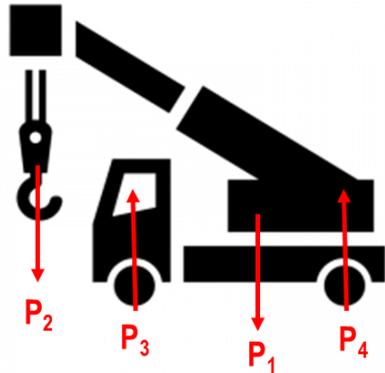
モーメントのつり合い



$$\sum_i M_i = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_4 a_4 = 0$$

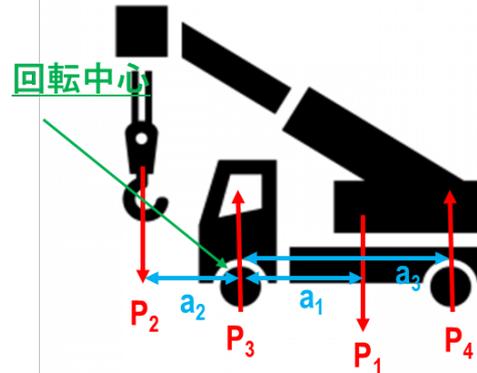
2.1. 力とモーメントの釣り合い

力の釣り合い

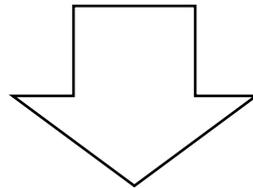


$$\sum_i P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$$

モーメントの釣り合い



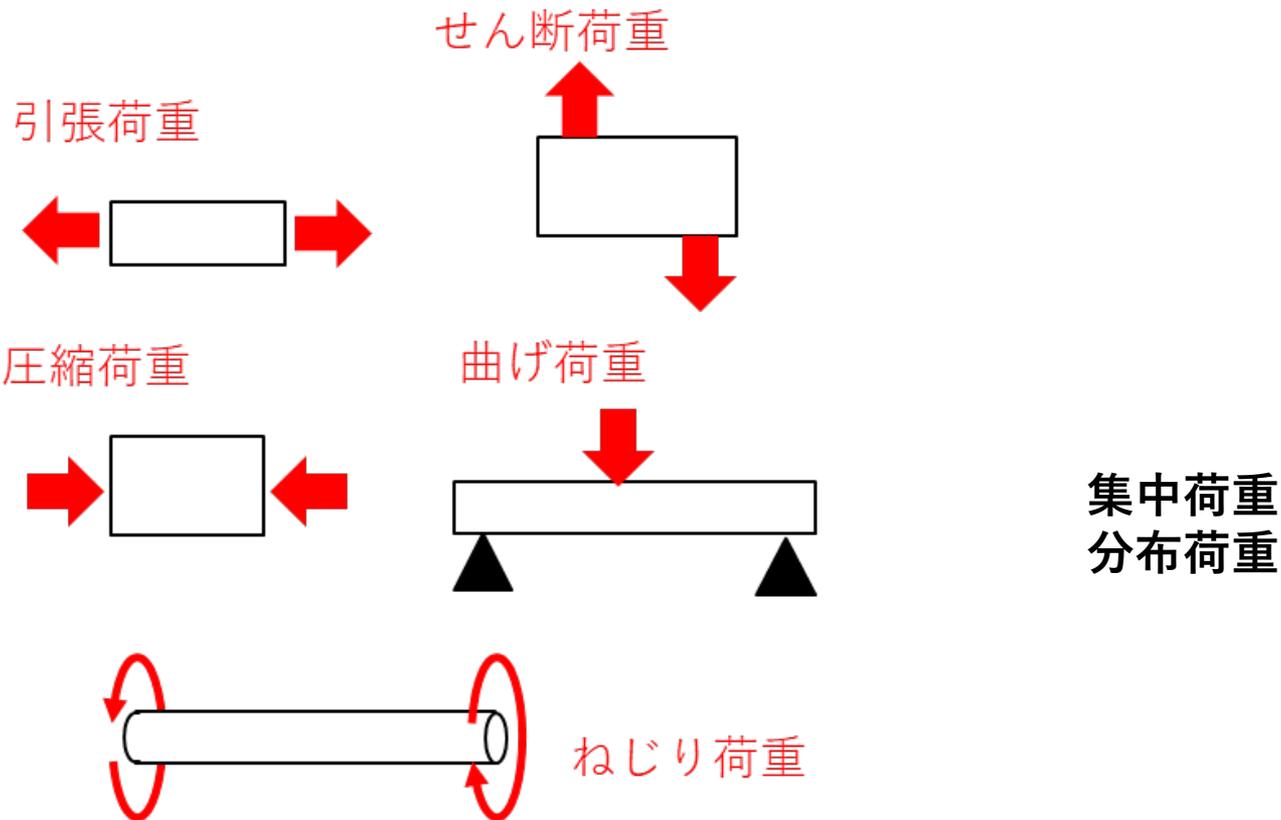
$$\sum_i M_i = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_4 a_4 = 0$$



基本的には、材料力学を考える場合、力とモーメントは常に釣り合っているものとする。すなわち、材料は運動しない（固定されている）場合を考える。

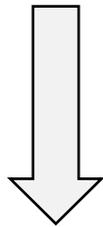
2.2. 外力と内力

外力



外力の種類は5個
この5個で部材に加わる外力を表現可能

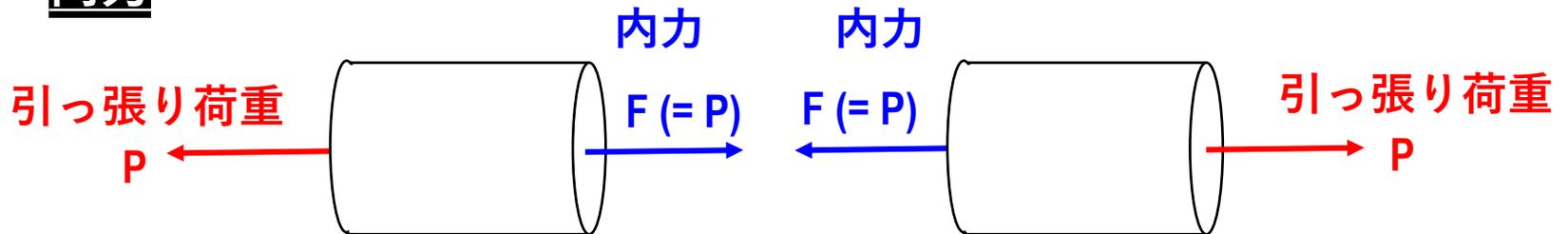
2.2. 外力と内力



引っ張り荷重によって材料は伸びる（いたるところで変形する）。外力（引っ張り荷重）は材料表面のみに加わるが材料内部にも力が加わる。そのような力を内力と言う。

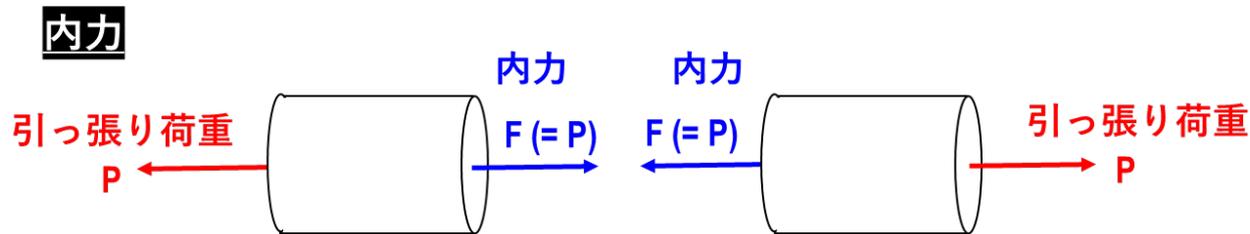
材料内部を仮想的に切って見ると

内力



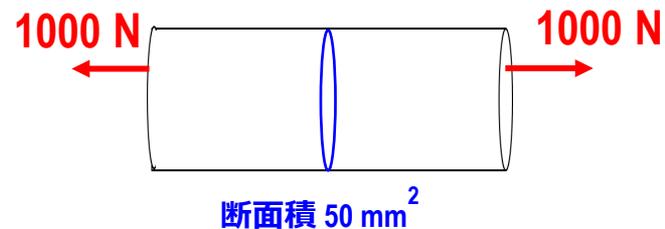
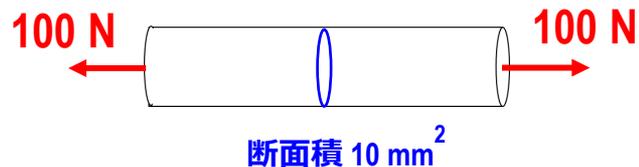
材料内部のすべての場所で力（モーメント）のつり合いが生じている

2.3. 応力とひずみ



材料に加わる力を一般化して評価したい
(形状に影響を受けない指標で評価したい)

例えば、下記のどちらのケースが強度が高いか？



2.3. 応力とひずみ

単位面積あたりの力で評価する

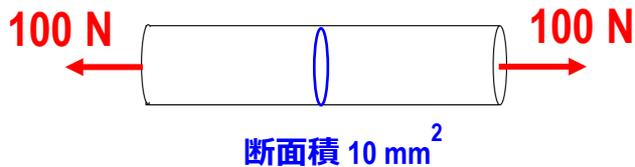
垂直応力

※断面に対して垂直に加わる応力

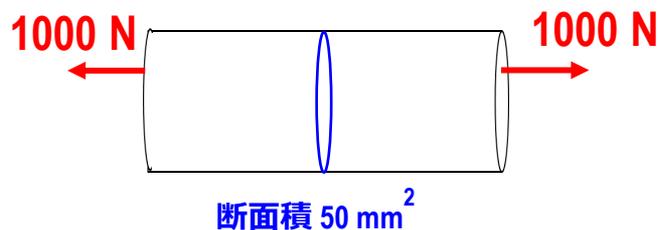
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

P : 内力の大きさ
A : 材料の断面積

例えば、下記のどちらのケースの方が厳しい条件か？



$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{100}{10 \times 10^{-6}} \\ &= 10 \times 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]} = 10 \times 10^6 \text{ [Pa]}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1000}{50 \times 10^{-6}} \\ &= 20 \times 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]} = 20 \times 10^6 \text{ [Pa]}\end{aligned}$$

こちらの条件の方が高い応力が加わっている
>>> 破損しやすい

第4章 複雑な問題

- 4.1. 組み合わせ応力が働く場合
- 4.2. モールの応力円
- 4.3. 主応力とミーゼス応力
- 4.4. 材料破壊の法則
- 4.5. まとめ

4.1. 組み合わせ応力が働く場合

応用編

第1章 はじめに

- 1.1. 材料力学とは
- 1.2. 材料力学を学ぶ意義
- 1.3. 材料力学を学ぶための道しるべ

第2章 応力とひずみ

- 2.1. 力とモーメントのつり合い
- 2.2. 外力と内力
- 2.3. 応力とひずみ
- 2.4. 応力とひずみの関係
- 2.5. 許容応力と安全率
- 2.6. まとめ

第3章 単純な問題

- 3.1. 単純な応力が働く場合

垂直応力 または せん断応力の一方のみが発生する場合を考える問題

- 3.4. 棒のねじり
- 3.5. まとめ

基礎編

ここまでの知識で十分に理解可能

第4章 複雑な問題 ← 今ここ

- 4.1. 組み合わせ応力が働く場合
- 4.2. モールの応力円
- 4.3. 主応力とミーゼス応力

垂直応力 とせん断応力が同時に発生する場合を考える問題

第5章 材料強度

- 5.1. 材料破損
- 5.2. 静的破壊
- 5.3. 疲労破壊
- 5.4. 座屈
- 5.5. 許容応力と安全率
- 5.6. まとめ

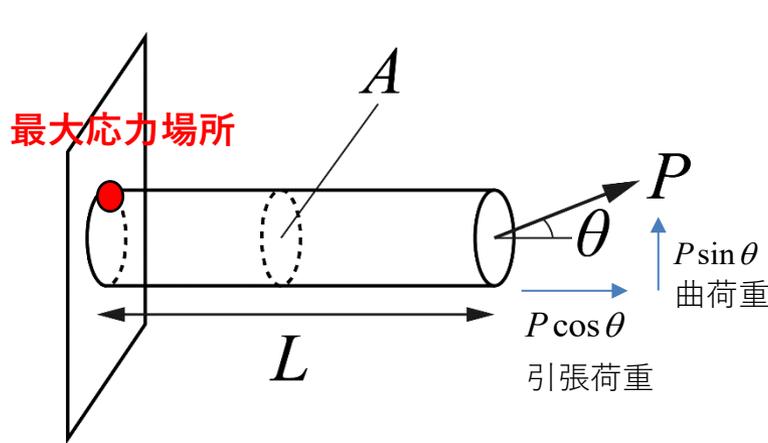
ここまでの知識では不十分

第6章 まとめ

- 6.1. 材料力学とCAE
- 6.2. より専門的な内容の理解のために

4.1. 組み合わせ応力が働く場合

下記の場合はどうやって強度計算をすればよい？



軸から θ ずれた方向に荷重 P が加わっている場合

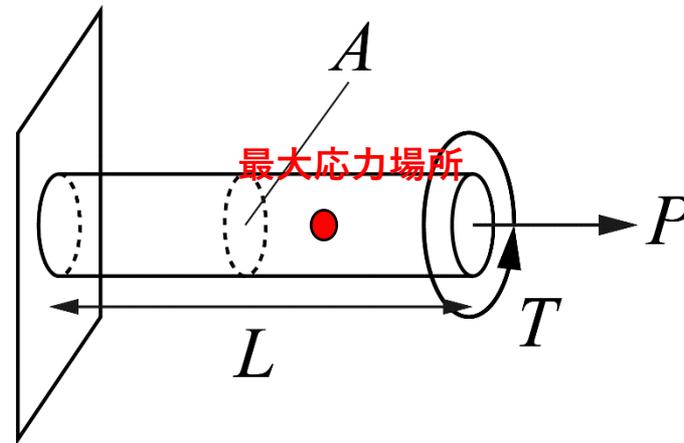
固定端に加わる最大応力は？

$$\sigma_{\max_p} = \frac{P \cos \theta}{A} = \frac{4P \cos \theta}{\pi d^2} \quad \text{引張による最大応力}$$

$$\sigma_{\max_b} = \frac{M}{Z} = \frac{32PL \sin \theta}{\pi d^3} \quad \text{曲げによる最大応力}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4P \cos \theta}{\pi d^2} + \frac{32PL \sin \theta}{\pi d^3} \quad \text{最大応力}$$

※ d は半径



引張荷重 P とトルク（モーメント） T が同時に加わっている場合

棒表面に加わる応力は？

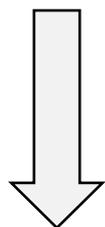
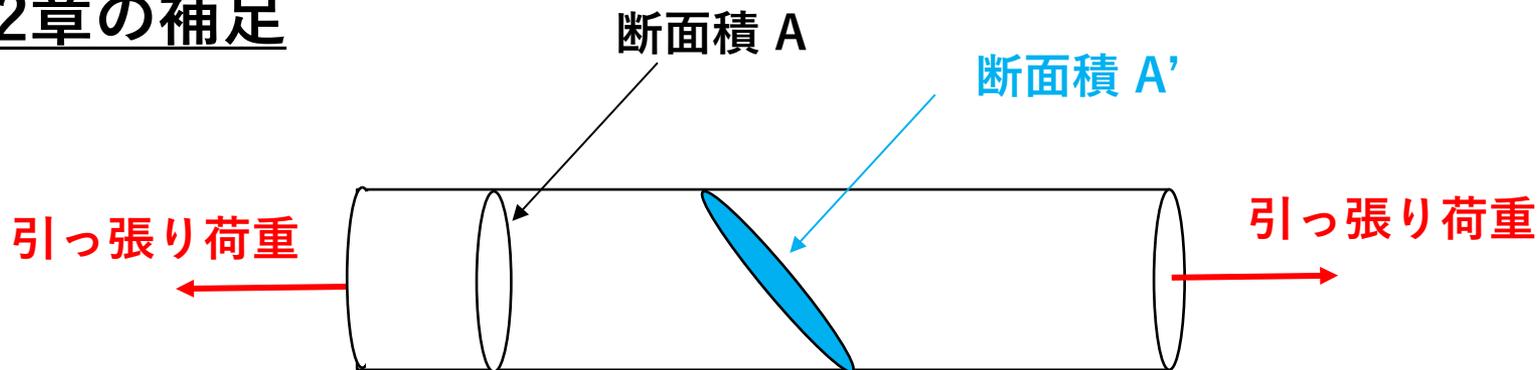
$$\sigma_{\max_p} = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} \quad \text{引張による最大応力}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{引張による最大応力}$$

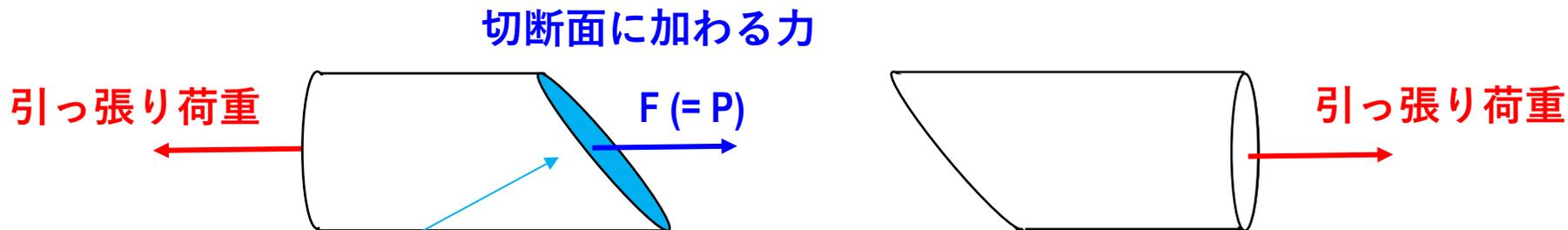
※ d は半径

足しているの？

2章の補足

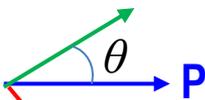


仮想的に切断する面の向きを変化させてみる
(前は軸方向に垂直に切断)



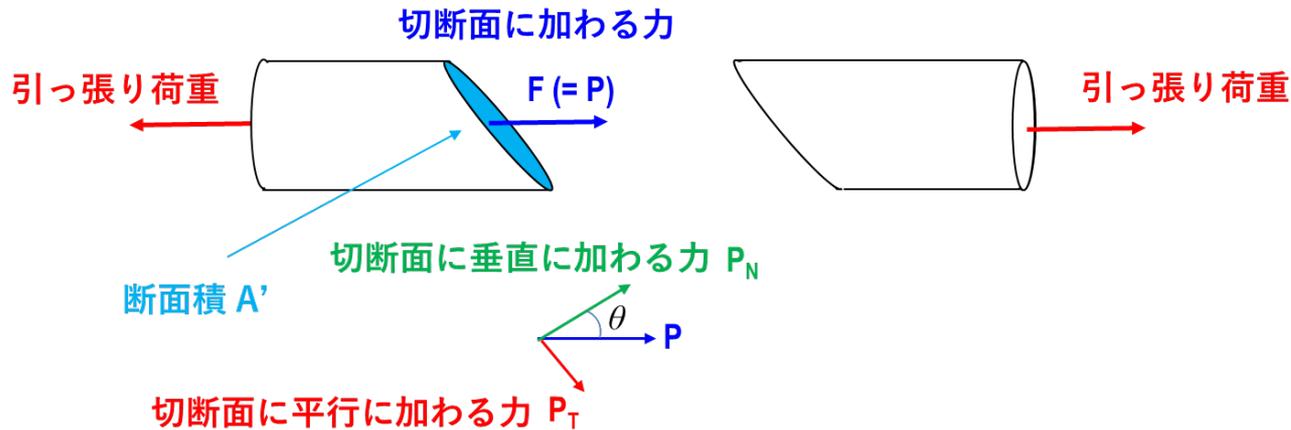
断面に垂直に加わる力 $P_N = P \cos \theta$

断面積 A'



切断面に平行に加わる力 $P_T = P \sin \theta$

2章の補足



垂直応力

※断面に対して垂直に加わる応力

$$\sigma = \frac{P_H}{A'} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$$

せん断応力

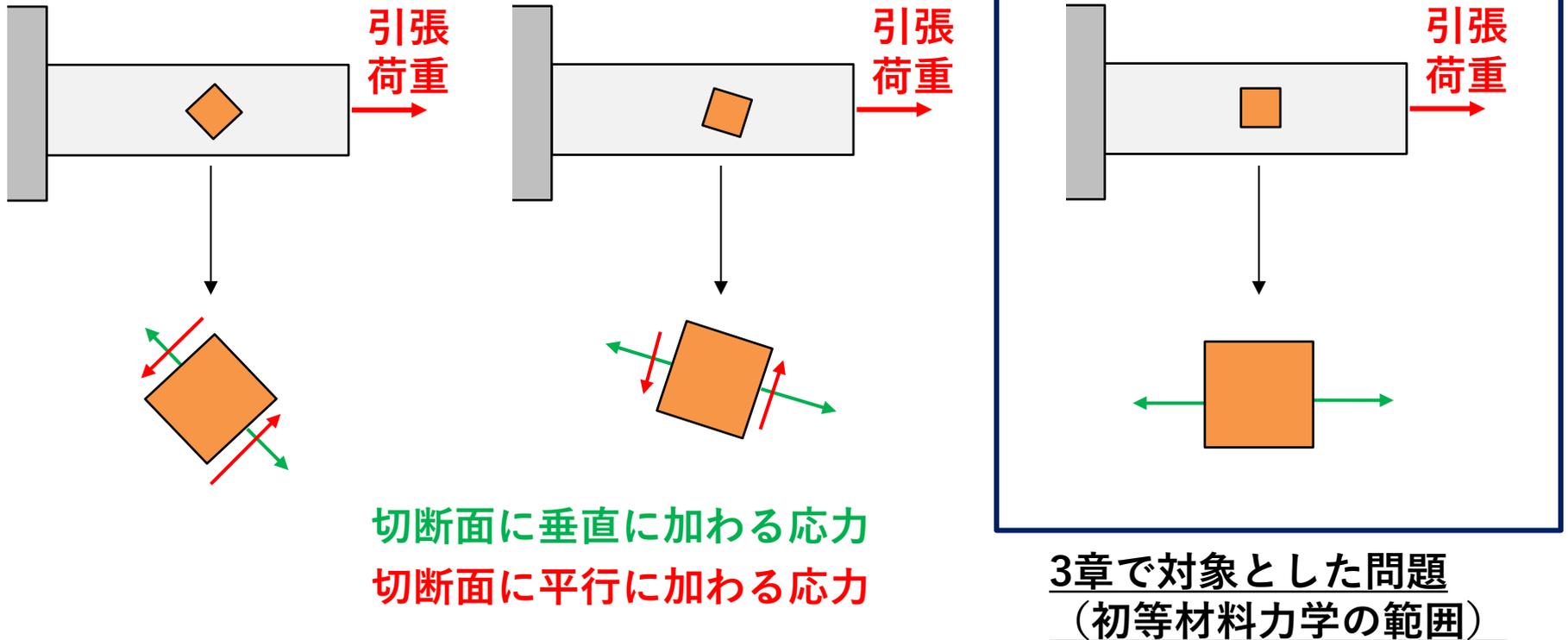
※断面に対して平行に加わる応力

$$\tau = \frac{P_T}{A'} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta$$

垂直応力とせん断応力は切断面の向きに依存する

垂直応力やせん断応力の量だけでは強度計算できない

2章の補足



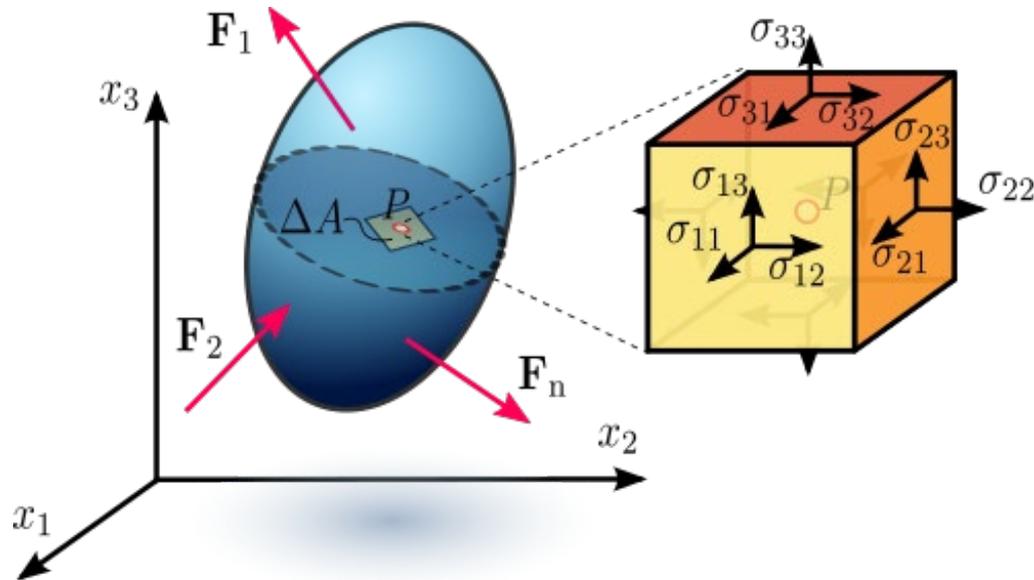
垂直応力とせん断応力は切断面の向きに依存する。

ただし単純な形状で単純な方向にのみしか荷重が加わらない場合はどちらかの応力のみを考えることで十分。

4.1. 組み合わせ応力が働く場合

引用：wikipedia

ちょっと難しい話



応力の一般的定義 (コーシー応力テンソル)

垂直応力

せん断応力

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$